第14講　空間ベクトルの様々な問題，空間座標における図形

PART1　直線と平面の交点

1 四面体OABCにおいて，辺OA，OB，OCを2：1に内分する点をそれぞれ A′，B′，C′とし，直線BC′と直線B′Cとの交点をD，3点A′，B，Cを通る平面と直線ADの交点をEとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

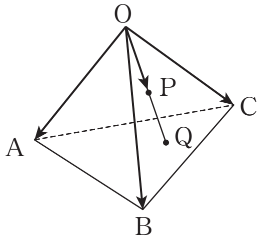
Point Pickup

4点O，A，B，Cが同一平面上にないとする。このとき，
直線OPが平面ABCと交わる点をQとすると

・点Qは直線OP上にある

・点Qは平面ABC上にある

これらを用いて，点Qを表す位置ベクトルを求めることができる。



第14講　PART1　確認問題

1 四面体OABCにおいて，辺OAの中点を A′，辺OBを3：2に内分する点を B′，辺OCを7：4に内分する点をC′ とし，直線 AB′ と直線 A′B の交点をD，3点A，B，C′ を通る平面と直線CDの交点をEとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\vec{b}$$

(2)　$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OE}=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}\vec{a}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{b}+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{c}$$

第 14 講　空間ベクトルの様々な問題，空間座標における図形

PART1　直線と平面の交点

1 四面体 OABC において，辺 OA，OB，OC を $2:1$ に内分する点をそれぞれ A′，B′，C′ とし，直線 BC′ と直線 B′C との交点を D，3 点 A′，B，C を通る平面と直線 AD の交点を E とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

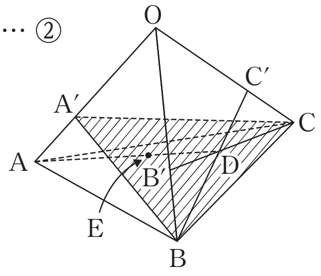
(2) $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) 点 D は直線 BC′ 上にあるから

$$\overrightarrow{OD}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC'}=(1-t)\vec{b}+\frac{2}{3}t\vec{c}\ \ (t \text{ は実数}) \cdots\cdots ①$$

点 D は直線 B′C 上にあるから

$$\overrightarrow{OD}=(1-s)\overrightarrow{OB'}+s\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\ \ (s \text{ は実数}) \cdots\cdots ②$$



①，②より

$$(1-t)\vec{b}+\frac{2}{3}t\vec{c}=\frac{2}{3}(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$$

$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$1-t=\frac{2}{3}(1-s),\ \ \frac{2}{3}t=s$$

$$s=\frac{2}{5},\ \ t=\frac{3}{5}$$

よって　$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

(2) 点 E は直線 AD 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE}&=(1-u)\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{OD}\\&=(1-u)\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}u\vec{b}+\frac{2}{5}u\vec{c}\\&=\frac{3}{2}(1-u)\overrightarrow{OA'}+\frac{2}{5}u\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}u\overrightarrow{OC}\ \ (u \text{ は実数})\end{aligned}$$

点 E は平面 A′BC 上にあるから

$$\frac{3}{2}(1-u)+\frac{2}{5}u+\frac{2}{5}u=1$$

$$u=\frac{5}{7}$$

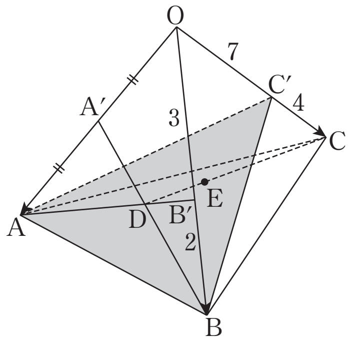
よって　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}$

第 14 講　PART1　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2，イ：7，ウ：3，エ：4，オカ：21，

キ：2，ク：7，ケ：1，コ：3

[解説]



(1)　点 D は直線 AB′ 上にあるから

$$\overrightarrow{OD}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB'}$$

$$=(1-t)\vec{a}+\frac{3}{5}t\vec{b}\ \ (t\text{ は実数})\ \cdots\cdots①$$

点 D は直線 A′B 上にあるから

$$\overrightarrow{OD}=(1-s)\overrightarrow{OA'}+s\overrightarrow{OB}$$

$$=\frac{1}{2}(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\ \ (s\text{ は実数})\ \cdots\cdots②$$

①，②より

$$(1-t)\vec{a}+\frac{3}{5}t\vec{b}=\frac{1}{2}(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから

$$1-t=\frac{1}{2}(1-s)$$

$$\frac{3}{5}t=s$$

ゆえに　$t=\frac{5}{7}$，$s=\frac{3}{7}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{OD}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}}$

(2)　点 E は直線 CD 上にあるから [A]

$$\overrightarrow{OE}=(1-u)\overrightarrow{OC}+u\overrightarrow{OD}$$
$$=(1-u)\vec{c}+\frac{2}{7}u\vec{a}+\frac{3}{7}u\vec{b}$$
$$=\frac{11}{7}(1-u)\overrightarrow{OC'}+\frac{2}{7}u\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}u\overrightarrow{OB}$$

（u は実数）

点 E は平面 ABC′ 上にあるから [A]

$$\frac{11}{7}(1-u)+\frac{2}{7}u+\frac{3}{7}u=1$$ [B]

ゆえに　$u=\dfrac{2}{3}$

よって　$\overrightarrow{\mathbf{OE}}=\dfrac{4}{21}\vec{a}+\dfrac{2}{7}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

[A]　4 点 O, A, B, C が同一平面上にないとする。このとき，直線 OP が平面 ABC と交わる点を Q とすると
- 点 Q は直線 OP 上にある
- 点 Q は平面 ABC 上にある

これらを用いて，点 Q を表す位置ベクトルを求めることができる。

[B]　点 P が平面 ABC 上にある
$\iff \overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$, $s+t+u=1$ を満たす実数 s, t, u が存在する